Devoir à la maison n° 05

À rendre le 20 novembre

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation différentielle (E) :

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \qquad (E)$$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle *solution de* (E) *sur l'intervalle* I toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I,\ x(x-4)y'(x) + (x-2)y(x) = -2.$$

On pourra utiliser librement les limites suivantes :

$$\frac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3}$$

$$\text{et} \quad \frac{\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

De plus on rappelle que si f est une fonction définie sur un intervalle autour d'un point $a \in \mathbb{R}$, elle est *continue* en a si elle admet une limite en a, auquel cas $\lim\limits_a f = f(a)$, et que la *dérivée* de f en a est définie par $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, si cette limite existe et est finie.

Partie I – Étude de deux primitives

1) Pour tout $x \in]0,4[$, on pose $A(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(4-t)}}$. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $A(x)$ pour tout $x \in]0,4[$.

2) Pour tout $x \in]-\infty,0[$, on pose $B(x) = \displaystyle\int_{-2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-4)}}$. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{-t}+\sqrt{4-t}$, calculer $B(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[$.

Partie II – Résolution de (E)

1) On note (H) l'équation homogène associée à (E).

a) Résoudre (H) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

b) Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, 4[$.

c) Résoudre (H) sur l'intervalle $]4, +\infty[$.

d) Montrer que la fonction constante égale à 0 est la seule solution de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2) On étudie ici (E) sur $]0, 4[$.

a) Résoudre (E) sur l'intervalle $]0, 4[$.

b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]0, 4[$ possédant une limite finie à droite en 0.
On note f cette solution. Donner l'expression de $f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{0^+} f$ (on pourra commencer par montrer que $\dfrac{\arcsin t}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1$).

3) On étudie ici (E) sur $]-\infty, 0[$.

a) Résoudre (E) sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

b) Montrer que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ possédant une limite finie à gauche en 0.
On note g cette solution. Donner l'expression de $g(x)$ ainsi que $\lim\limits_{0^-} g$.

4) On étudie ici (E) sur $]-\infty, 4[$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction h définie sur $]-\infty, 4[$ qui vérifie les trois points suivants :
(1) la restriction de h à $]0, 4[$ est solution de (E) sur $]0, 4[$,
(2) la restriction de h à $]-\infty, 0[$ est solution de (E) sur $]-\infty, 0[$,
(3) h est continue en 0.

b) Pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 4[$, on pose $T(x) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0}$. Donner la limite l de T en 0^+.
On admettra que T tend aussi vers l en 0^-.

c) En déduire que (E) possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty, 4[$. Préciser la valeur de cette fonction en 0, ainsi que la valeur de sa dérivée en 0.

5) L'équation (E) possède-t-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

— FIN —