Équations différentielles (suite)

Skander Zannad et Judicaël Courant

2014-01-31

1 Gérer des EDO d'ordre 2, 3, ...

Équation d'un amortisseur soumis à une excitation de pulsation ω :

$$my'' = -cy' - ky + \alpha \cos \omega t$$

Pas une équation d'ordre 1. Comment la gérer ?

On introduit $Y(t) = (y(t), y'(t))$.

En posant $\pi_0 : (x, y) \mapsto x$ et $\pi_1 : (x, y) \mapsto 1$:

$$\begin{aligned} Y'(t) &= (y'(t), y''(t)) \\ &= (y'(t), (-cy'(t) - ky(t) + \alpha \cos \omega t)m^{-1}) \\ &= (\pi_1(Y(t)), (-c\pi_1(Y(t)) - k\pi_0(Y(t)) + \alpha \cos \omega t)m^{-1}) \\ &= F(t, Y(t)) \end{aligned}$$

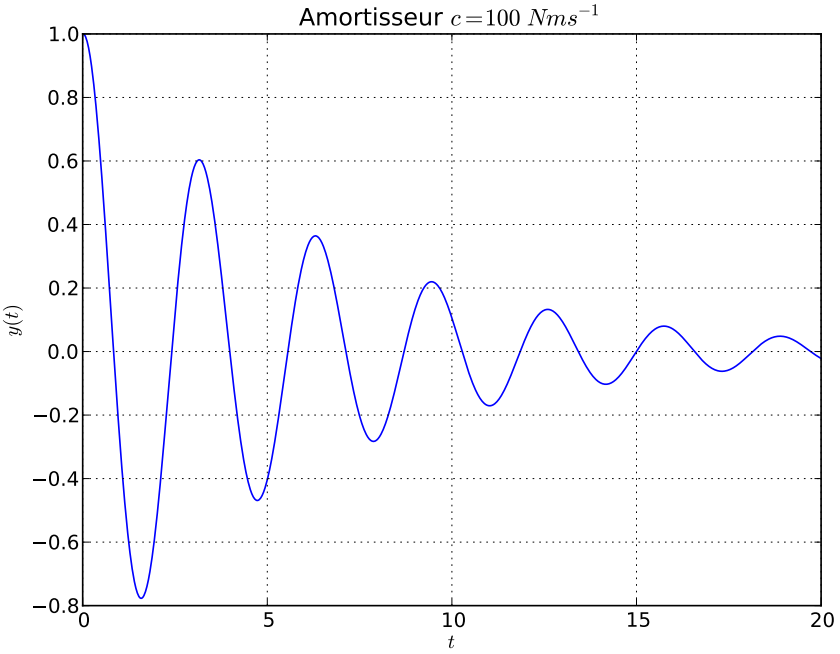
où $F : (t, Y) \mapsto \ldots$

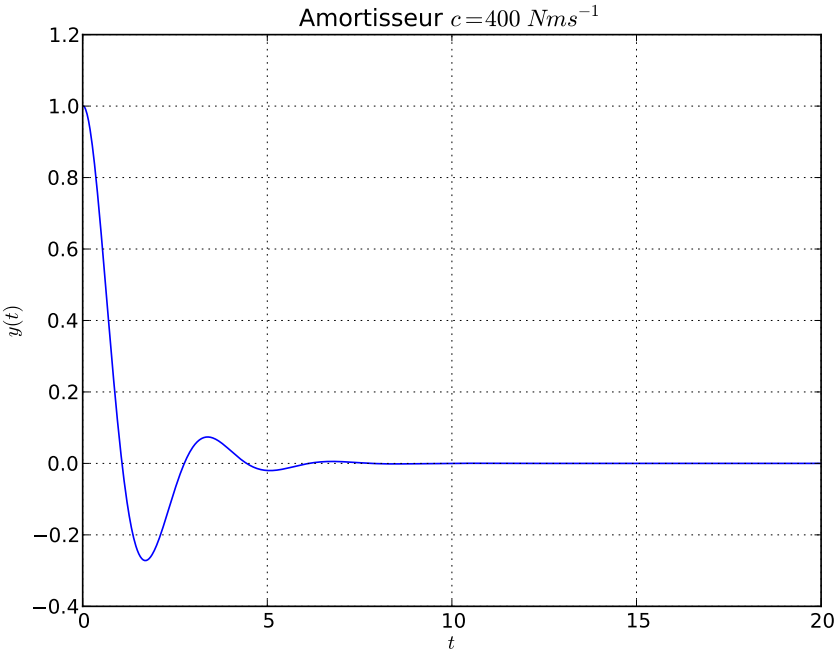
On s'est ramené à une équation d'ordre 1 !

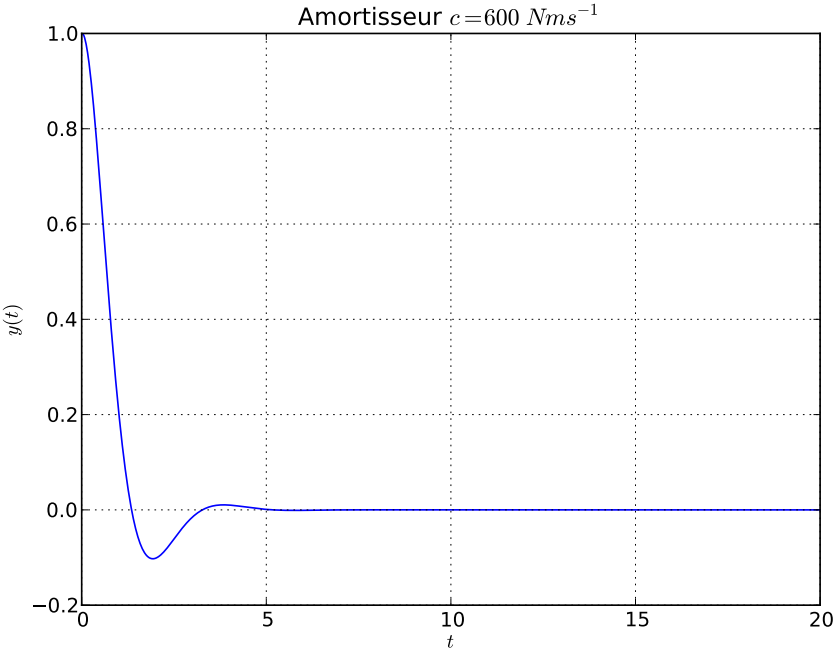
Résolution :

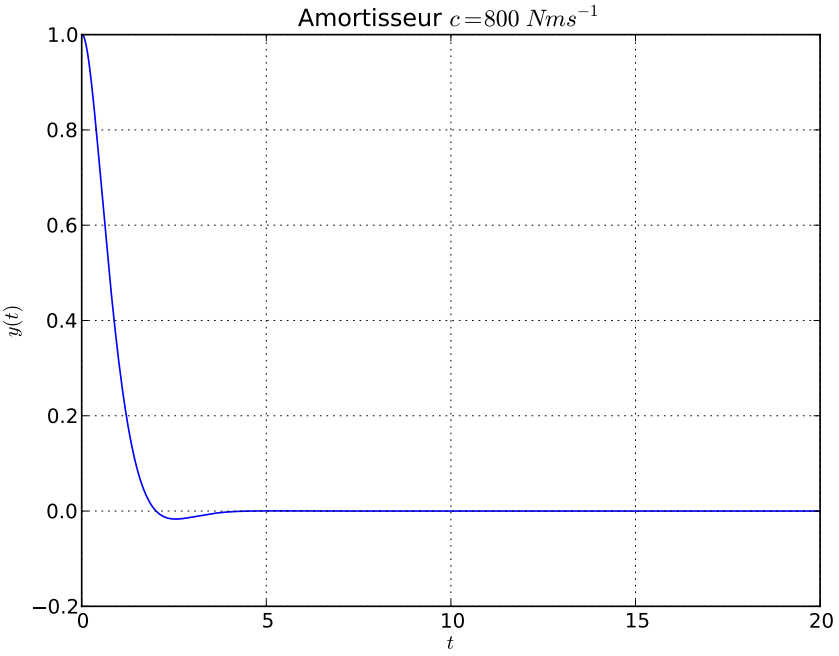
```
m = 250 # kg
omega = 1 # s ** (-1)
alpha = 0 # N
k = 1000 # N / m
c = 500 # N * m * s**(-1)
y0 = 1 # m
yp0 = 0 # m . s**(-1)
t0 = 0
t1 = 20 # s
n = 1000
h = float(t1 - t0) / n
```

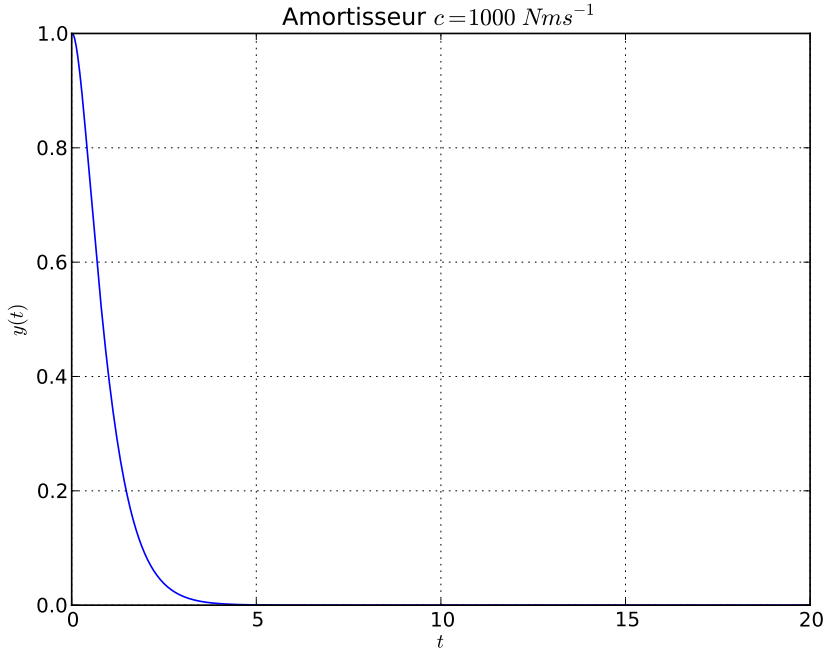
```
def F(t, Y):
  y, yp = Y
  ypp = (-c*yp - k*y + alpha*cos(omega*t)) / m
  return array([yp, ypp])
les_t, les_y = euler_vectoriel(F, t0, t1,
  array([y0, yp0]), h)
```

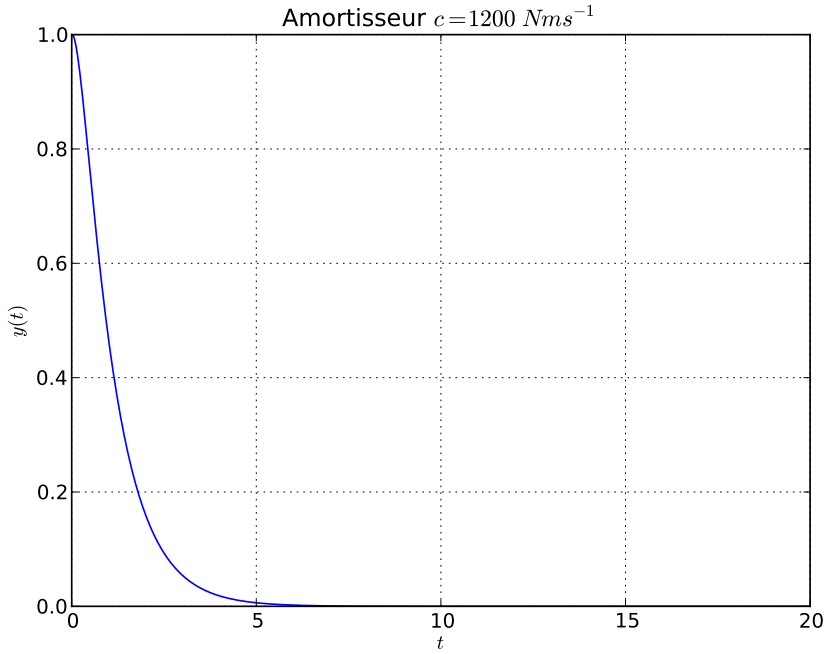


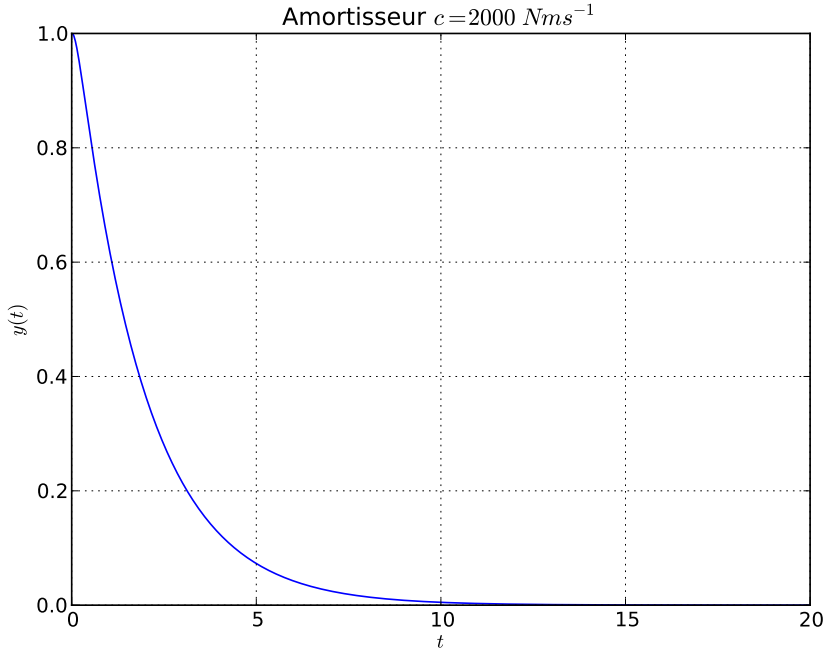

Amortisseur $c = 400\ Nms^{-1}$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
$y(t)$
0
5
10
15
20
t


Amortisseur $c = 600\ Nms^{-1}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
$y(t)$
0
5
10
15
20
t


Amortisseur $c = 800\ Nms^{-1}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
$y(t)$
0
5
10
15
20
t


Amortisseur $c = 1000\ Nms^{-1}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$y(t)$
0
5
10
15
20
t

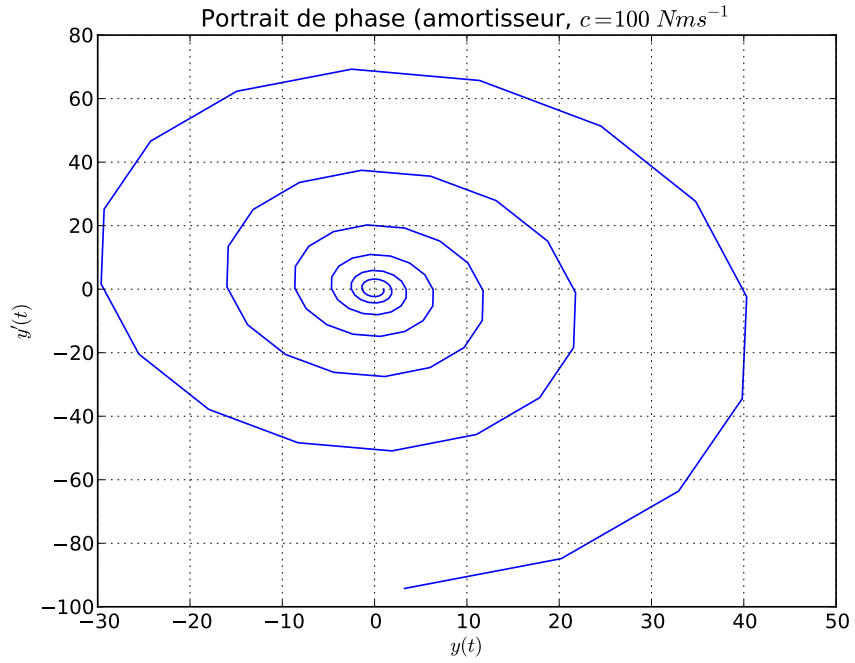




2 Portraits de phase

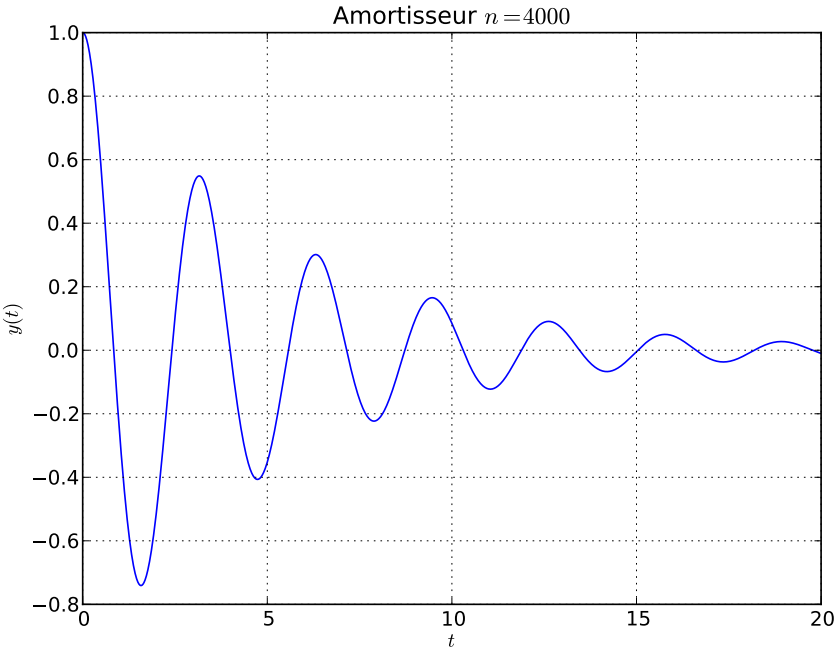
On porte sur le graphe les couples $(y(t), y'(t))$:

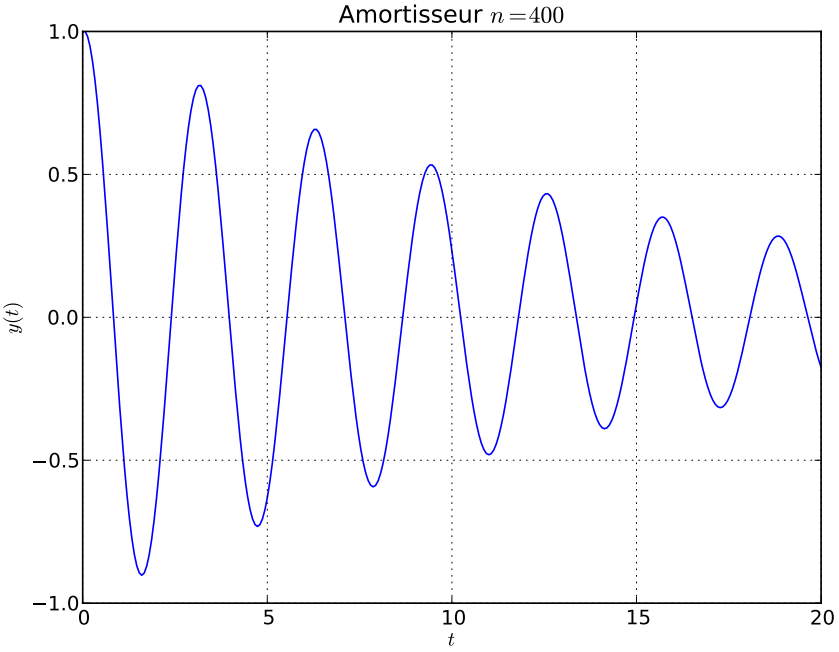
```
def phase(legende, nomfichier):
  _, les_y = euler_vectoriel(F, t0, t1,
      array([y0, yp0]), h)
  pl.clf()
  pl.xlabel('$y(t)$')
  pl.ylabel("$y'(t)$")
  pl.grid()
  pl.plot(array(les_y)[:, 0], array(les_y)[:, 1])
  pl.title(legende)
  pl.savefig(nomfichier)
```

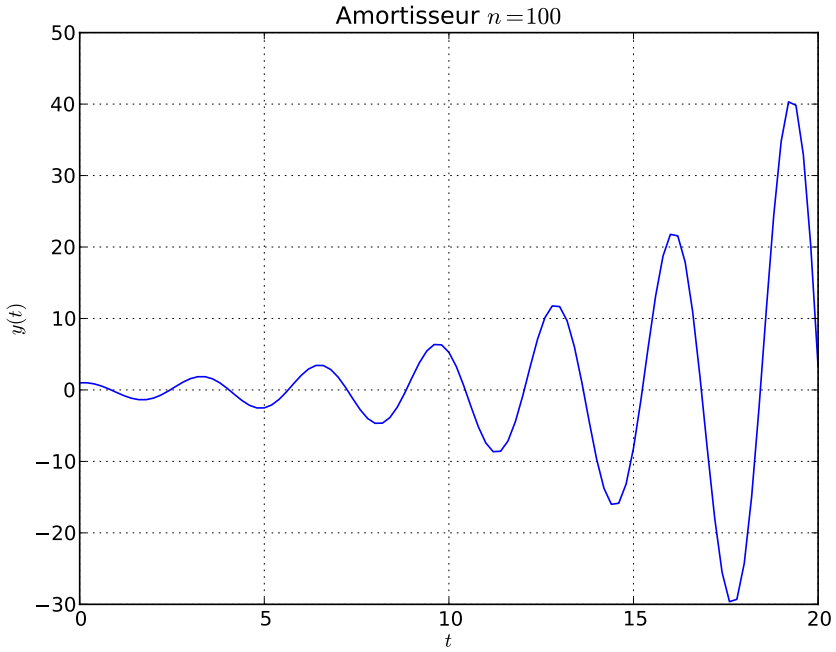


3 Influence du pas de discrétisation

On reprend l'exemple de l'amortisseur, avec $c = 100$ et avec différentes valeurs du pas de discrétisation $h = (t_1 - t_0)/n$:


Amortisseur $n = 4000$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
$y(t)$
0
5
10
15
20
t


Amortisseur $n = 400$
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
$y(t)$
0
5
10
15
20
t



Le dernier graphe est clairement délirant sur le plan physique... (voir livre, notamment fig 9.19 p243)

Plusieurs facteurs contribuent à l'erreur :

— des erreurs de méthode (la méthode d'Euler n'est pas parfaite)

— des erreurs de calcul (les flottants ne sont pas les réels)

Pour les erreurs de méthode, on dit qu'il y a convergence si, quand n tend vers $+\infty$ (donc quand h tend vers 0), l'erreur de méthode tend vers 0.

Il y a convergence si

1. certaines conditions de stabilité de la méthode employée sont respectée
2. et la somme $e(h)$ des petites erreurs commises à chaque étape tend vers 0 quand h tend vers 0 ($e(h)$: erreur de consistance).

On dit qu'une méthode est d'ordre p si l'erreur de consistance est un $O(Kh^p)$.

La méthode d'Euler est une méthode d'ordre 1.

4 Autres méthodes

4.1 Méthode d'Euler implicite

La méthode d'Euler présentée jusqu'ici est dite *explicite* :

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k)$$

Méthode d'Euler implicite

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_{k+1})$$

Inconvénient : pour trouver y_{k+1}, il faut résoudre une équation (numériquement).
Avantage : souvent plus stable.

4.2 Méthode de Heun

Si $y_n = y(t_n)$, il existe $c \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$y(t_{n+1}) = y_n + hy'(c)$$

Tout le problème est d'estimer $y'(c)$.
Idée de la méthode d'Euler explicite :

$$y'(c) \approx y'(t_n) = k_1 \qquad \text{où } k_1 = y'(t_n) = F(t_n, y_n)$$

Idée de la méthode de Heun :

$$\begin{aligned} y'(c) &\approx \frac{y'(t_n) + y'(t_{n+1})}{2} \\ &\approx \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2} && (y' = F(t,y)) \\ &\approx \frac{k_1 + F(t_{n+1}, y_n + hk_1)}{2} && (y(t_{n+1}) \approx y_n + hk_1) \end{aligned}$$

On pose donc :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(F(t_n, y_n) + F\Big(t_{n+1}, y_n + hF(t_n, y_n)\Big)\Big)$$

La méthode de Heun est d'ordre (de convergence) deux.

4.3 Méthode de Runge-Kutta

Pour évaluer $y'(c)$, on calcule

$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

où k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des évaluations des pentes :

k_1 pente en y_n

k_2 pente évaluée en $t_n + \frac{h}{2}$ en utilisant k_1 pour estimer $y(t_n + \frac{h}{2})$

k_3 pente évaluée en $y_n + \frac{h}{2}$ en utilisant k_2 pour estimer $y(t_n + \frac{h}{2})$

k_4 pente évaluée en $t_n + h$ en utilisant k_3 pour estimer $y(t_n + h)$.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3)
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'une méthode d'ordre de convergence 4.
Elle est facile à programmer et donc très populaire.